**Tên đề tài:**

"Phân tích và mô phỏng một số bài toán thực tế bằng phương trình vi phân tuyến tính sử dụng Excel"

(Analysis and numerical simulation of some real-world problems using linear differential equations and Excel)

**Mục lục**

**PHẦN 1-MỞ ĐẦU**

**Lý do chọn đề tài**

**PHẦN 2- NỘI DUNG**

**Chương 1. Kiến thức chuẩn bị.**

**1.1. Phương trình vi phân**

**1.1.1. Định nghĩa**

**1.1.2. Nghiệm của phương trình vi phân**

**1.1.2.1 Khái niệm**

**1.1.2.2. Đường cong nghiệm**

**1.1.2.3. Nghiệm tường minh và nghiệm ngầm định.**

**1.2. Phương trình vi phân tuyến tính**

**1.2.1. Định nghĩa**

**1.2.2. Phương trình vi phân tuyến tính bậc nhất.**

**1.2.2.1. Định nghĩa**

**1.2.2.2. Cách giải**

**1.2.2.3. Ví dụ**

**1.3. Bài toán giá trị ban đầu.**

**1.3.1. Khái niệm**

**1.3.2. Diễn giải hình học**

**1.3.3. Ví dụ**

**1.3.4. Sự tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán giá trị ban đầu.**

**1.4. Phương pháp số giải phương trình vi phân**

**1.4.1. phương pháp Euler tiến**

**1.4.2. Phương pháp Euler lùi**

**Chương 2. Một số mô hình vi phân tuyến tính bậc nhất trong thực tế**

**2.1. Mô hình sự phát triển của vi khuẩn**

**2.1.1. Xây dựng mô hình**

**2.1.2. Bài tập**

**Lời giải**

**2.1.3. Mô phỏng bằng excel**

**2.2. Chu kì phân rã của Plutonium**

**2.2.1. Xây dựng mô hình**

**2.2.2. Bài tập**

**Lời giải**

**2.2.3. Mô phỏng bằng excel**

**2.3. Xác định tuổi hóa thạch**

**2.3.1. Xây dựng mô hình**

**2.3.2. Bài tập**

**Lời giải**

**2.3.3. Mô phỏng bằng excel**

**2.4. Định luật làm mát/nóng lên của Niu-Tơn**

**2.4.1. Xây dựng mô hình**

**2.4.2. Bài tập**

**Lời giải**

**2.4.3. Mô phỏng bằng excel**

**2.5. Hỗn hợp hai dung dịch muối**

**2.5.1. Xây dựng mô hình**

**2.5.2. Bài tập**

**Lời giải**

**2.5.3. Mô phỏng bằng excel**

**2.6. Mô hình mạch điện nối tiếp**

**2.6.1. Xây dựng mô hình**

**2.6.2. Bài tập**

**Lời giải**

**2.6.3. Mô phỏng bằng excel**

**2.7. Mô hình vật rơi trong không khí**

**2.7.1. Xây dựng mô hình**

**2.7.2. Bài tập**

**Lời giải**

**2.7.3. Mô phỏng bằng excel**

**2.8. Mô hình chuyển động của tên lửa**

**2.8.1. Xây dựng mô hình**

**2.8.2. Bài tập**

**Lời giải**

**2.8.3. Mô phỏng bằng excel**

**2.9. Mô hình quần cá.**

**2.9.1. Xây dựng mô hình**

**2.9.2. Bài tập**

**Lời giải**

**2.9.3. Mô phỏng bằng excel**

**2.10. Mô hình hộp trượt**

**2.10.1. Xây dựng mô hình**

**2.10.2. Bài tập**

**Lời giải**

**2.10.3. Mô phỏng bằng excel**

**PHẦN 3-KẾT LUẬN**

**Tài liệu tham khảo**

**\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\***

**PHẦN 1-MỞ ĐẦU**

**Lý do chọn đề tài**

Phương trình vi phân xuất hiện trên cơ sở phát triển của khoa học, kỹ thuật và những yêu cầu đòi hỏi của thực tế, nó là một bộ môn toán học cơ bản vừa mang tính lý thuyết cao vừa mang tính ứng dụng rộng. Nhiều bài toán cơ học, vật lý dẫn đến sự nghiên cứu các phuơng trình vi phân tương ứng. Ngành toán học này đã góp phần xây dựng lý thuyết chung cho các ngành toán học và khoa học khác. Nó có mặt và góp phần nâng cao tính hấp dẫn lý thú, tính đầy đủ sâu sắc, tính hiệu quả giá trị của nhiều ngành như tối ưu, điều khiển tối ưu, giải tích số, tính toán khoa học,…

Một phương trình vi phân tuyến tính bậc nhất có thể được sử dụng như một mô hình toán học trong nghiên cứu về sự sinh trưởng của vi khuẩn, sự phân rã chất phóng xạ, làm nóng lên/ nguội đi các vật thể, hỗn hợp dung dịch, vận tốc của một vật thể rơi trong không khí, dòng điện trong một đoạn mạch nối tiếp, quần thể cá, chuyển động của hộp trượt trên mặt phẳng nghiêng,... Chương 1 của luận văn đưa ra một số kiến thức chuẩn bị, chương 2 xây dựng một số mô hình bài toán trong thực tế liên quan đến phương trình vi phân tuyến tính bậc nhất. Ngoài việc giải phương trình vi phân tìm công thức nghiệm, luận văn còn sử dụng phương pháp số tính xấp xỉ đó là phương pháp Euler, tính nghiệm gần đúng tại các điểm và mô phỏng đồ thị bằng excel

**PHẦN 2- NỘI DUNG**

**Chương 1. Kiến thức chuẩn bị.**

**1.1. Phương trình vi phân**

**1.1.1. Định nghĩa: Phương trình vi phân (DE)** là một phương trình chứa các đạo hàm của một hoặc nhiều hàm chưa biết (hoặc các biến phụ thuộc), đối với một hoặc nhiều biến độc lập.

Nếu một phương trình vi phân chỉ chứa các đạo hàm thông thường của một hoặc nhiều hàm chưa biết đối với một biến độc lập, nó được coi là một **phương trình vi phân thường (ODE).**

**Ví dụ về ODE.**



(một ODE có thể chứa nhiều hàm chưa biết)

Biểu diễn một phương trình vi phân thường bậc n trong một biến phụ thuộc ở dạng tổng quát 

dạng tiêu chuẩn là **** (trong đó f là hàm liên tục có giá trị thực)

**1.1.2. Nghiệm của phương trình vi phân thông thường bậc n**

**1.1.2.1 Khái niệm**

Nghiệm của phương trình vi phân thường bậc n:  trên tập I là hàm có ít nhất n đạo hàm liên tục trên tập I và thỏa mãn với mọi x thuộc I

**1.1.2.2. Đường cong nghiệm**

Đồ thị của một nghiệm của ODE được gọi là một đường cong nghiệm. Vì là một hàm **khả vi** nên nó liên tục trong khoảng I. Do đó có thể có sự khác biệt giữa đồ thị của hàm và đồ thị của nghiệm . Nói một cách khác, miền của hàm không cần phải giống với khoảng I của định nghĩa (hoặc miền) của nghiệm .

**1.1.2.3. Nghiệm tường minh và nghiệm ngầm định.**

Một nghiệm trong đó biến phụ thuộc chỉ được biểu thị theo biến độc lập và các hằng số được gọi là một nghiệm tường minh.

Hệ thức G(x,y)=0 được cho là nghiệm không tường minh (nghiệm ngầm định)

của phương trình vi phân thường (1.1) trên khoảng I, với điều kiện là tồn tại ít nhất một hàm thỏa mãn quan hệ G(x,y)=0 cũng như phương trình vi phân (1.1) với mọi x thuộc I.

**1.2. Phương trình vi phân tuyến tính**

**1.2.1. Định nghĩa**

Phương trình vi phân thường bậc n**:** được gọi là phương trình tuyến tính nếu F là tuyến tính đối với .Nói cách khác phương trình vi phân tuyến tính có dạng:

****

Hay 

****

**1.2.2. Phương trình vi phân tuyến tính bậc nhất.**

**1.2.2.1. Định nghĩa:**

Phương trình vi phân tuyến tính bậc nhất có dạng: 

Trong đó A(x), B(x), C(x) là các hàm liên tục trong khoảng nào đó. Nếu trongkhoảng đang xét mà  thì phương trình được đưa về dạng:

Phương trình có dạng  gọi là phương trình tuyến tính thuần nhất của phương trình (1.5)

**1.2.2.2. Cách giải:** Sử dụng phương pháp biến thiên hằng số

\* Bước 1: Xét phương trình tuyến tính thuần nhất 

Giả sử  khi đó phương trình (1.6) đưa về dạng 

Do đó



Ta có y=0 cũng là nghiệm và có thể dùng công thức (1.7) ứng với C=0

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình (1.6) là  (C là hằng số tùy ý)

\* Bước 2: Tìm nghiệm của (1.5) có dạng (1.7), coi C=C(x) khi đó

 thay hệ thức này vào phương trình (1.5) ta có:

 do đó:

 (  là hằng số tùy ý)

Vậy nghiệm của phương trình (1.5) là: 

**1.2.2.3. Ví dụ**

Giải phương trình: ** (\*)**

**Lời giải.**

Xét phương trình thuần nhất: (C là hằng số tùy ý)

Coi 

Thay vào phương trình (\*) ta được



Vậy nghiệm của phương trình là: 

**1.3. Bài toán giá trị ban đầu.**

**1.3.1. Khái niệm**

Cho phương trình vi phân bậc n dạng tiêu chuẩn

, tìm nghiệm của phương trình thỏa mãn  trong đó  là các hằng số tùy ý được gọi là bài toán giá trị ban đầu bậc n (IVP). Các giá trị của y(x) và

(n-1) đạo hàm đầu tiên của nó tại  được gọi là điều kiện ban đầu (IC)

**1.3.2. Diễn giải hình học**

**\* Đường cong nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính bậc nhất**: **** với điều kiện ****

**Chart, diagram

Description automatically generated**

**Hình 1.1.** Đường cong nghiệm của IVP bậc nhất

(đường màu xanh đi qua điểm )

**\* Đường cong nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính bậc hai**:  với điều kiện 

Chart, diagram

Description automatically generated

**Hình 1.2.** Đường cong nghiệm của IVP bậc hai

(đường màu xanh đi qua điểm và có hệ số góc của tiếp tuyến bằng)

**1.3.3. Ví dụ**

**Ví dụ 1.** Phương trình bậc nhất y’=y

Họ nghiệm của phương trình là trên khoảng  ,

\* Với điều kiện y(0)=3. thay x=0, y=3 vào ta được C=3. Do đó  là một nghiệm của VIP.

\* Với điều kiện y(1)=-2, thay x=1, y=-2 vào ta được Ce=-2, hay  .Do đó là một nghiệm của VIP.

Hai đường cong nghiệm thể hiện bằng đường màu xanh lam đậm và màu đỏ sẫm trong hình 1.3

Diagram

Description automatically generated

**HÌNH 1.3.** Đường cong nghiệm của hai IVP trong Ví dụ 1

**1.3.4. Sự tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán giá trị ban đầu.**

Gọi R là một vùng hình chữ nhật trong mặt phẳng Oxy được giới hạn bởi  chứa điểm (x0, y0). Nếu hàm f(x, y) và liên tục trên R thì tồn tại khoảng  và một hàm duy nhất y(x) xác định trên I0, đó là một nghiệm của bài toán giá trị ban đầu.

Kết quả ở trên là một trong những định lý tồn tại và duy nhất phổ biến nhất cho phương trình vi phân bậc một vì tiêu chí về tính liên tục của f(x, y) và  tương đối dễ kiểm tra. Nội dung của định lý được minh họa trong Hình 1.4

A picture containing text, antenna

Description automatically generated

**Hình 1.4** Vùng hình chữ nhật R

**1.4. Phương pháp số giải phương trình vi phân tuyến tính bậc nhất**

**1.4.1. Phương pháp Euler tiến**

Xét bài toán giá trị ban đầu: 

Chọn một giá trị h cho kích thước của mỗi bước, đặt 

Giải gần đúng (1.9) là tìm các giá trị gần đúng  của giá trị đúng  tại các điểm 

Một bước của phương pháp Euler tiến từ  tới  và công thức tính gần đúng:  .

Phương pháp Euler tương đối chính xác nếu sự thay đổi các giá trị của y không quá nhanh và giá trị của x không quá lớn. Giá trị bước h càng nhỏ thì sai số càng thấp.

A picture containing laser

Description automatically generated

**Hình 1.5.** Minh họa phương pháp Euler: đường cong nghiệm đúng có màu xanh, lời giải gần đúng của nó là đường nhiều cạnh màu đỏ.

**1.4.2. Phương pháp Euler lùi.**

Xét bài toán giá trị ban đầu: 

Chọn một giá trị h cho kích thước của mỗi bước, đặt 

Một bước của phương pháp Euler lùi từ  tới  và 

(trong công thức euler lùi  có ở cả hai vế, vì vậy ta phải giải phương trình)

**Ví dụ 2.** Xét bài toán giá trị ban đầu 

Ta sử dụng kích thước bước h=0,5; f(x,y)=y(x), 

Ta có các kết quả gần đúng:



**1.4.3. Mô phỏng giá trị gần đúng của nghiệm bằng Excel.**

Xét bài toán giá trị ban đầu:

Ta lập bảng số liệu gồm các cột: n, h, ; ,  (chú ý n=0,1,2,...). Kết quả thu được là kết quả tính gần đúng của  tại các điểm  tương ứng.

Sau khi có bảng số liệu với giá trị n phù hợp, ta vẽ biểu đồ dựa vào cột  và 

Dựa vào bảng số liệu ta có thể nhận xét về sự thay đổi (tăng hay giảm) của khi  tăng và những kết luận quan trọng khác.

**Ví dụ 1.** Xét bài toán giá trị ban đầu 

Ta sử dụng kích thước bước h=1, f(x,y)=y(x), công thức Euler 

****

Ta có thể lập bảng để tính các giá trị của y(x) như sau:

Table

Description automatically generated

**Hình 1.6.** Biểu đồ ví dụ 1

Ta thấy  trong khi với công thức nghiệm chính xác đã tìm được là  thì  thì sai số là khá lớn. Ta cùng xét kết quả  phương pháp Euler với các kích thước bước khác nhau:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Kích thước bước** | **Kết quả phương pháp Euler** | **Sai số so với giá trị đúng** |
| 1 | 16 | 38.598 |
| 0.25 | 35.53 | 19.07 |
| 0.1 | 45.26 | 9.34 |
| 0.05 | 49.56 | 5.04 |
| 0.025 | 51.98 | 2.62 |
| 0.0125 | 53.26 | 1.34 |

Như vậy kích thước h càng nhỏ thì sai số càng thấp.

**Chương 2. Một số mô hình vi phân tuyến tính bậc nhất trong thực tế**

**2.1. Mô hình sự tăng trưởng của vi khuẩn**

**2.1.1. Xây dựng mô hình**

Xét một loại vi khuẩn có số lượng ban đầu tại thời điểm t=0 là 

x=x(t) là số lượng vi khuẩn tại thời điểm t.

Tỷ lệ  : lượng vi khuẩn trung bình tại thời điểm t.

Khi đó  : tốc độ tăng trưởng của vi khuẩn tại thời điểm t.

Do 

Tốc độ tăng trưởng của vi khuẩn tỷ lệ thuận với lượng vi khuẩn tại thời điểm t, mô hình tăng trưởng của vi khuẩn được biểu thị bởi nghiệm của bài toán giá trị ban đầu: 

Trong đó k là hằng số tỉ lệ.

\* Nếu  , suy ra x(t) là hàm đồng biến chứng tỏ lượng vi khuẩn tăng dần khi thời gian t tăng.

\* Nếu  , suy ra x(t) là hàm nghịch biến chứng tỏ lượng vi khuẩn giảm dần khi thời gian t tăng.

**Ví dụ:** một mẫu cấy ban đầu có số lượng vi khuẩn là  . Tại t = 1h số lượng vi khuẩn đo được là 3/2 .Áp dụng công thức (1): , theo công thức nghiệm (1.7) 

Tại thời điểm ban đầu



Vậy 

**2.1.2. Bài tập**

**Bài 1.** Trong mô hình tăng trưởng của vi khuẩn ở mục 2.1.1,xác định thời gian cần thiết để số lượng vi khuẩn tăng lên gấp ba lần?

**Lời giải.** Số lượng vi khuẩn tại thời điểm t được tính bằng công thức:

, khi số vi khuẩn tăng lên gấp 3 lần nghĩa là  , ta có  kéo theo 0,4055t = ln 3, hay h.

Chart

Description automatically generated

**Hình 2.1.** Thời gian mà lượng vi khuẩn tăng gấp 3 lần

**Bài 2.** Quần thể vi khuẩn trong môi trường nuôi cấy phát triển với tốc độ tỉ lệ thuận với số lượng vi khuẩn có mặt tại thời điểm t. Sau 3 giờ quan sát thấy có 400 vi khuẩn. Sau 10 giờ có 2000 vi khuẩn. Số lượng vi khuẩn ban đầu là bao nhiêu?

**Lời giải.**

Gọi P=P(t) là quần thể vi khuẩn tại thời điểm t và P0 là số lượng vi khuẩn ban đầu.

Từ  ta thu được P = P0ekt .

Theo giả thiết P(3) = 400 và P(10) = 2000 ta có hệ phương trình:



Vậy số lượng vi khuẩn ban đầu là  (con)

**2.1.3. Mô phỏng bằng Excel.**

Trong mô hình tăng trưởng của vi khuẩn ở mục 2.1.1, số lượng vi khuẩn được xác định là nghiệm của bài toán giá trị ban đầu: 

Với k=0,4055, số lượng vi khuẩn ở thời điểm ban đầu ****

Ta có phương trình: 

Tính gần đúng bằng phương pháp Euler, kích thước bước h=0,1; ; ta có bảng số liệu sau

**Table

Description automatically generated**

**Hình 2.2.** Biểu đồ sự tăng trưởng của vi khuẩn tính bằng phương pháp Euler.

**Nhận xét:** dựa vào bảng số liệu và biểu đồ ta thấy lượng vi khuẩn ngày càng tăng theo thời gian, và sau 2,7h lượng vi khuẩn đã tăng gần như gấp 3 lần (phù hợp với kết quả tính được ở bài tập 1 là sau 2,71h)

**2.2. Sự phân rã của Plutonium**

**2.2.1. Xây dựng mô hình**

Hạt nhân của nguyên tử bao gồm sự kết hợp của proton và neutron. Nhiều sự kết hợp giữa proton và neutron này không ổn định, nghĩa là các nguyên tử phân rã hoặc biến đổi thành nguyên tử của một chất khác. Những hạt nhân như vậy được cho là chất phóng xạ. Trong vật lý, chu kỳ bán rã là thước đo độ ổn định của chất phóng xạ. Chu kỳ bán rã đơn giản là thời gian để một nửa số nguyên tử trong một lượng ban đầu A0 phân hủy, hoặc chuyển hóa thành các nguyên tử của nguyên tố khác. Thời gian bán hủy của chất càng dài thì chất đó càng bền. Ví dụ, chu kỳ bán rã của radium phóng xạ cao, Ra-226, là khoảng 1700 năm, trong 1700 năm, một nửa lượng Ra-226 được biến đổi thành radon, Rn-222. Đồng vị uranium phổ biến nhất, U-238, có chu kỳ bán rã xấp xỉ 4.500.000.000 năm, trong khoảng 4,5 tỷ năm, một nửa số lượng U-238 được biến đổi thành chì, Pb-206.

Để mô hình hóa hiện tượng phân rã phóng xạ, người ta giả thiết rằng tốc độ phân rã dA/dt tỷ lệ với số hạt nhân A (t) của chất còn lại tại thời điểm t, gọi k là hằng số tỷ lệ (k <0): 

Nếu gọi A0 là lượng chất phóng xạ ban đầu tại thời điểm t=0, lượng chất phóng xạ còn lại tại thời điểm t là nghiệm của bài toán giá trị ban đầu:

  (2.2) .

**2.2.2. Bài tập**

**Bài 1.** Một lò phản ứng chuyển đổi uranium-238 tương đối ổn định thành đồng vị plutonium 239. Sau 15 năm, người ta xác định rằng 0,043% lượng A0 ban đầu của plutonium đã bị phân hủy. Tìm chu kì bán rã của đồng vị này nếu tốc độ phân huỷ tỉ lệ với lượng nguyên tử còn lại.

**Lời giải**

Gọi A(t) là lượng plutonium còn lại tại thời điểm t, A(t) là nghiệm của bài toán giá trị ban đầu:  

Ta được . Nếu 0,043% số nguyên tử của A0 đã bị phân huỷ thì phần còn lại là 99,957% . Để xác định hằng số phân rã k, chúng ta sử dụng 0,99957.A0 = A(15) , nghĩa là . Giải k thì ta được . Do đó .

Ta có chu kỳ bán rã là giá trị tương ứng của thời gian tại đó .

Giải t ta được , hoặc . Phương trình cuối cùng cho kết quả:  (năm)

**Bài 2.** Đồng vị phóng xạ của chì, Pb-209, bị phân hủy với tốc độ tỉ lệ thuận với lượng có mặt tại thời điểm t và có chu kỳ bán rã là 3,3 giờ. Nếu ban đầu có 1 gam đồng vị này thì sau bao lâu thì 90% khối lượng chì bị phân rã?

**Lời giải.**

Gọi A = A (t) là khối lượng chì có mặt tại thời điểm t. Do tốc độ phân hủy tỷ lệ thuận với lượng chất phóng xạ có mặt tại thời điểm t nên A(t) là nghiệm của bài toán giá trị ban đầu:

 và A(0) = 1

Từ  và A(0) = 1 ta thu được .Mặt khác chu kỳ bán rã là 3.3 giờ nên:



Khi 90% lượng chì đã bị phân huỷ thì còn lại 0,1 gam, suy ra A(t) = 0,1 ta có (giờ)

**Bài 3.** Ban đầu có 100 miligam một chất phóng xạ. Sau 6 giờ khối lượng đã giảm 3%. Nếu tốc độ phân rã tỉ lệ với khối lượng chất có ở thời điểm t thì lượng chất còn lại sau 24 giờ là bao nhiêu, xác định chu kỳ bán rã của chất phóng xạ đó.

**Lời giải.**

Gọi A = A (t) là số lượng chất phóng xạ còn lại tại thời điểm t.

Vì tốc độ phân rã tỉ lệ với khối lượng chất có ở thời điểm t nên A(t) là nghiệm của bài toán giá trị ban đầu:  và A(0) = 100.

Từ  và A (0) = 100 ta thu được 

Theo đề bài sau 6 giờ khối lượng đã giảm 3% nghĩa là khối lượng còn lại 97 miligam, suy ra



Lượng chất phóng xạ còn lại sau 24 giờ là:



Chu kỳ bán rã là thời gian T mà lượng chất phóng xạ còn lại một nửa.

Ta có



Vậy chu kỳ bán rã T= 136,5 giờ.

**Bài 4.** (a) Coi bài toán có giá trị ban đầu   là mô hình cho sự phân rã của một chất phóng xạ. Chứng tỏ rằng chu kỳ bán rã T của chất là 

(b) Chứng tỏ rằng lời giải của bài toán giá trị ban đầu trong phần (a) có thể được viết 

(c) Nếu một chất phóng xạ có chu kỳ bán rã T đã cho ở phần (a) thì sau bao lâu thì một lượng A0 ban đầu của chất đó sẽ bị phân rã thành 1 lượng bằng?

**Lời giải.**(a) Nghiệm của  là .Gọi chu kỳ bán rã của chất phóng xạ là T, ta có:



(b) Theo câu a) 

Ta lại có 

(c) Gọi t là thời gian lượng A0 ban đầu của chất đó sẽ bị phân rã thành 1 lượng bằng, ta có:



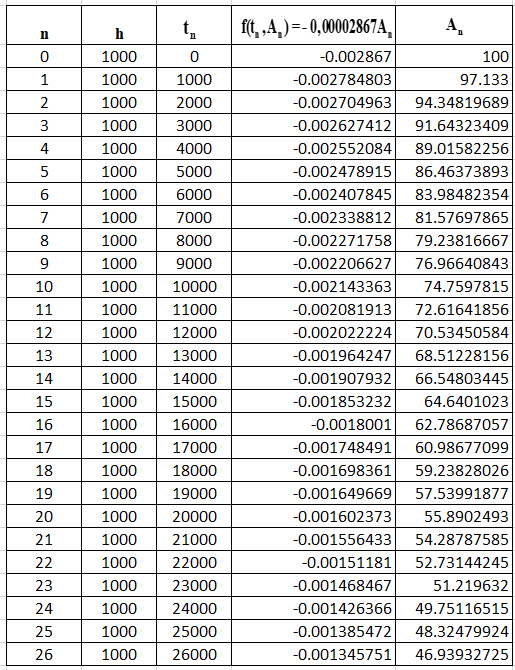
Vậy sau 3 chu kỳ bán rã lượng A0 ban đầu của chất đó sẽ bị phân rã thành 1 lượng bằng 

**2.2.3.** **Mô phỏng bằng Excel.**

Xétmô hìnhphân rã của chất phóng xạ plutonium 239 là:   với  , giả sử 

Ta có bài toán giá trị ban đầu: , 

Sử dụng phương pháp Euler ta có bảng giá trị:



**Hình 2.3.** Biểu đồ sự phân rã của chất phóng xạ uranium-238

tính bằng phương pháp Euler.

**Nhận xét:** Dựa vào bảng số liệu và đồ thị ta thấy lượng chất phóng xạ ngày càng giảm dần theo thời gian, và sau gần 24.000 năm, lượng chất phóng xạ giảm còn 1 nửa, kết quả này tương đối chính xác với kết quả tính được ở bài 1 (chu kỳ bán rã của plutonium 239 là 24.176 năm)

**2.3. Xác định tuổi của hóa thạch**

**2.3.1. Xây dựng mô hình**

Xác định niên đại của carbon:

Khoảng năm 1950, một nhóm các nhà khoa học tại Đại học Chicago do nhà hóa học Willard Libby đứng đầu đã phát minh ra một phương pháp sử dụng đồng vị phóng xạ của cacbon để xác định tuổi gần đúng của vật chất hóa thạch cacbon. Lý thuyết xác định niên đại carbon dựa trên thực tế là đồng vị phóng xạ carbon-14 được tạo ra trong khí quyển do tác động của bức xạ vũ trụ lên nitơ-14. Tỷ lệ giữa lượng C-14 và C-12 bền trong khí quyển dường như là một hằng số, và kết quả là lượng tương ứng của đồng vị có trong tất cả các sinh vật sống cũng giống như trong khí quyển. Khi một sinh vật sống chết đi, sự hấp thụ C-14, bằng cách hô hấp, ăn uống, hoặc tổng hợp quang học, chấm dứt. Bằng cách so sánh tỷ lệ tương ứng của C-14, trong một hóa thạch với tỷ lệ không đổi được tìm thấy trong khí quyển, có thể có được một ước tính hợp lý về tuổi của nó.

Phương pháp này dựa trên kiến ​​thức về chu kỳ bán rã của C-14. Giá trị tính toán của Libby về chu kỳ bán rã của C-14 là khoảng 5600 năm và được gọi là chu kỳ bán rã Libby. Ngày nay, giá trị thường được chấp nhận cho chu kỳ bán

rã của C-14 là chu kỳ bán rã Cambridge gần 5730 năm. Đối với công việc của mình, Libby đã được trao giải Nobel hóa học vào năm 1960. Phương pháp của Libby đã được sử dụng để xác định niên đại cho đồ nội thất bằng gỗ được tìm thấy trong các ngôi mộ Ai Cập, các gói vải dệt của các Dead Sea Scrolls, một bản sao được phát hiện gần đây của Gnostic Gospel of Judas được viết trên giấy cói, và tấm vải của Tấm vải liệm bí ẩn của Turin.



**Hình 2.4.** Một trang của GnosticGospel of Judas

Gọi lượng carbon ban đầu có trong mẫu hóa thạch là , A(t) là lượng carbon tại thời điểm t. Do tốc độ phân hủy tỷ lệ thuận với lượng carbon nên ta có phương trình vi phân sau:

 (đây chính là bài toán giá trị ban đầu, là mô hình để xác định tuổi của hóa thạch carbon).

Xét mẫu xương hóa thạch được tìm thấy chứa lượng C-14 bằng 0,1% lượng C-14 ban đầu. Ta sẽ xác định tuổi của hóa thạch.

Từ phương trình vi phân   ta có ngay .

Để xác định giá trị của hệ số phân rã k, biết chu kỳ bán rã của carbon C-14 là 5730 năm, ta sử dụng kết quả thực tế là  hay .

Giải phương trình:



Theo giả thiết lượng carbon còn lại bằng 0,1% lượng C-14 ban đầu, nghĩa là:



Vậy tuổi của hóa thạch là 57.103 tuổi.

**2.3.2. Bài tập**

**Bài 1**. Các nhà khảo cổ đã sử dụng những mảnh gỗ đốt, hoặc than củi, được tìm thấy tại khu vực này để xác định niên đại các bức tranh và hình vẽ thời tiền sử trên tường và trần của một hang động ở Lascaux, Pháp (xem Hình 2.5) để xác định tuổi gần đúng của một mẩu gỗ bị đốt cháy, nếu người ta thấy rằng 85,5% C-14 được tìm thấy trong các cây sống cùng loại đã bị phân huỷ.

****

**Hình 2.5.** Bức tranh tường hang động (bức tranh đá vẽ một con ngựa và một con bò).

**Lời giải**

Ta có chu kỳ bán rã của C-14 là 5730 năm. Từ phần 2.3.1 ta có công thức tính lượng carbon còn lại sau thời gian t là 

Theo giả thiết, có 85,5% C-14 đã bị phân hủy, nghĩa là lượng còn lại tại thời điểm t là 1 - 0,855 = 0,145 lần lượng ban đầu, nghĩa là 

Vì 85,5% C-14 đã bị phân hủy, 1 - 0,855 = 0,145 lần lượng ban đầu hiện tại, vì vậy



Vậy tuổi gần đúng của mẫu gỗ là 15.963 tuổi.

**Bài 2.** Tấm vải liệm thành Turin, cho thấy hình ảnh âm bản của thi thể một người đàn ông dường như đã bị đóng đinh, được nhiều người tin rằng đó là tấm vải niệm của Chúa Giêsu thành Nazareth (xem Hình 2.6). Năm 1988, Vatican đã cho phép để tấm vải liệm có niên đại carbon. Ba phòng thí nghiệm độc lập của khoa học đã phân tích tấm vải và kết luận rằng tấm vải niệm đã xấp xỉ 660 năm tuổi, độ tuổi phù hợp với hình dáng lịch sử của nó. Sử dụng độ tuổi này, hãy xác định tỷ lệ phần trăm của lượng C-14 ban đầu còn lại trong vải tính đến năm 1988.

A picture containing text, old, fabric

Description automatically generated

**Hình 2.6.** Tấm vải niệm.

**Lời giải.**

Ta có chu kỳ bán rã của C-14 là 5730 năm. Giả sử ,  . Từ phần 2.3.1 ta có công thức tính lượng carbon còn lại tại thời điểm t là 

Theo giả thiết t=660 (năm), ta có 

Vậy tính đến năm 1988 lượng C-14 còn lại trong vải bằng 92,326% so với lượng C-14 ban đầu.

**2.3.3. Mô phỏng bằng Excel**

Xét mẫu xương hóa thạch được tìm thấy chứa 0,1% lượng C-14 ban đầu, với , bài toán giá trị ban đầu để xác định tuổi của hóa thạch là:



Sử dụng tính gần đúng bằng phương pháp Euler: 

 ; 

ta có bảng số liệu sau:

Table

Description automatically generated

**Hình 2.7.** Biểu đồ lượng C-14 còn lại sau khoảng thời gian t.

**Nhận xét:** Dựa vào bảng số liệu và biểu đồ ta thấy lượng C-14 trong mẫu hóa thạch ngày càng giảm, đến khoảng hơn 5600 năm thì lượng C-14 chỉ cong một nửa lượng ban đầu (tương đối chính xác với chu kỳ bán rã của C-14 là 5730 năm)

**2.4. Định luật làm mát/nóng lên của Niu-Tơn**

**2.4.1. Xây dựng mô hình**

Theo định luật làm mát/nóng lên thực nghiệm của Newton, tốc độ thay đổi nhiệt độ của vật thể tỷ lệ với sự chênh lệch giữa nhiệt độ của vật thể và nhiệt độ của môi trường xung quanh, gọi là nhiệt độ môi trường. Nếu T(t) biểu thị nhiệt độ của một vật thể tại thời điểm t, *T*m là nhiệt độ của môi trường xung quanh và dT/dt là tốc độ thay đổi nhiệt độ của vật thể, thì định luật làm mát /nóng lên của Newton chuyển thành phát biểu toán học:

 (2.3)

với k là hằng số tỉ lệ. Nếu *T*m là một hằng số, ta xét hai trường hợp:

\* Khi làm mát: nhiệt độ vật giảm dần khi thời gian tăng lên, chứng tỏ hàm T(t) nghịch biến

Suy ra 

Mà 

\* Khi làm nóng lên: nhiệt độ vật tăng dần khi thời gian tăng lên, chứng tỏ hàm T(t) đồng biến

Suy ra 

Mà 

Vậy trong cả hai trường hợp hệ số k<0.

**Ta xét ví dụ làm nguội bánh như sau:**

Khi lấy một chiếc bánh ra khỏi lò, nhiệt độ của nó được đo là 300° F. Ba phút sau nhiệt độ của nó là 200 ° F. Mất bao lâu để bánh nguội đến nhiệt độ phòng là 70° F?

Theo giả thiết nhiệt độ phòng là 70° F nên . Xét bài toán giá trị ban đầu:



Sau khi ra lò 3 phút thì nhiệt độ của nó là 200 ° F, ta sẽ xác định k để T(3)=200

Phương trình  vừa tuyến tính vừa có thể phân tách được. Chúng ta biến đổi như sau:



Ta có T(0)=300, suy ra



Mặt khác:



Vậy ta có nhiệt độ bánh tại thời điểm t là 

Khi t=10s nhiệt độ của bánh là T(10)=104,34° F

Để bánh đạt được nhiệt độ phòng thì T(t)=70 hay , ta không thể tìm một giá trị t cụ thể hữu hạn.

Vì , nghĩa là sau một khoảng thời gian dài hợp lý thì chiếc bánh sẽ đạt đến nhiệt độ phòng.

Chart, histogram

Description automatically generatedTable

Description automatically generated

**Hình 2.8.** Sau khoảng hơn 32 phút bánh sẽ đạt được nhiệt độ phòng.

**2.4.2. Bài tập**

**Bài 1.** . Một nhiệt kế được lấy ra khỏi phòng có nhiệt độ 70° F và được mang ra ngoài, nơi có nhiệt độ không khí là 10°F. Sau một nửa phút, nhiệt kế ghi 50° F. Số đo của nhiệt kế là bao nhiêu khi t =1 phút? Sau bao lâu thì nhiệt kế đạt 15° F?

**Lời giải.**

Theo định luật làm mát của Newton ta có bài toán giá trị ban đầu:



Từ



Vì T(0)=70, suy ra 

Mặt khác theo giả thiết:



Công thức tính nhiệt độ của nhiệt kế tại thời điểm t là:



Sau 1 phút số đo của nhiệt kế là:



Khi nhiệt độ đạt 15° F:



Vậy sau 3,06 phút nhiệt kế chỉ 15° F

**Bài 2.** Một nhiệt kế được đưa từ phòng bên trong ra bên ngoài, nơi có nhiệt độ không khí là 5°F. Sau 1 phút, nhiệt kế ghi 55°F và sau 5 phút, nhiệt kế ghi 30°F. Nhiệt độ ban đầu của phòng bên trong là bao nhiêu?

**Lời giải.**

Theo định luật làm mát của Newton ta có phương trình vi phân:



Theo giả thiết T(1)=55; T(5)=30, ta có hệ phương trình:



Công thức tính nhiệt độ tại thời điểm t là:



Nhiệt độ ban đầu của phòng bên trong là:



**Bài 3.** Người ta thả một thanh kim loại nhỏ, có nhiệt độ ban đầu là 20 ° C vào một bình lớn đựng nước sôi. Sau bao lâu thì thanh đó đạt được 900 C nếu biết nhiệt độ của nó tăng 20 C trong 1 giây? Sau bao lâu thì thanh này đạt 980 C?

**Lời giải.**

Theo định luật làm nóng lên của Newton, ta có phương trình vi phân:



Theo giả thiết T(0)=20, T(1)=22, ta có hệ phương trình:



Công thức tính nhiệt độ thanh kim loại tại thời điểm t là:

****

Khi thanh đạt900 C nghĩa là:



Vậy t=82,1 giây thì thanh đạt 900 C

Khi thanh đạt980 C nghĩa là:



Vậy t=145,7 giây thanh đạt 980 C.

**Bài 4**. Hai thùng lớn A và B có cùng kích thước được xếp bằng các lọ khác nhau. Các dung dịch trong thùng chứa A và B được duy trì ở 0°C và 100°C, tương ứng. Người ta hạ một thanh kim loại nhỏ có nhiệt độ ban đầu là 1000 C vào bình A. Sau 1 phút nhiệt độ của thanh là 900C. Sau 2 phút thanh này được lấy ra và chuyển ngay sang bình kia. Sau 1 phút ở thùng B nhiệt độ của thanh tăng lên 10°C. Sau bao lâu, được đo từ khi bắt đầu toàn bộ quá trình để thanh này đạt đến 99,9°C?

**Lời giải.**

Theo định luật làm mát, nóng lên của Newton

\* Phương trình vi phân của thùng thứ nhất là 

nghiệm của phương trình này là 

Từ 

Sau 1 phút nhiệt độ của thanh kim loại là 900C nên ta có phương trình



Vậy 

Sau 2 phút nhiệt độ của thanh kim loại là:



\* Phương trình vi phân của thùng chứa thứ hai là 

nghiệm của phương trình là .

Khi nhúng thanh kim loại vào bình thứ hai thì nhiệt độ ban đầu của nó là T2(0)=81. Nên 

Sau 1 phút ở bình thứ hai, nhiệt độ của thanh kim loại tăng lên 10°C nghĩa là , vậy ta có:



Vậy 

Khi thanh kim loại đạt 99,9°C ta có

Và Đặt T2(t) = 99,9 ta có :

Do đó, từ khi bắt đầu quá trình “nhúng kép”, tổng thời gian cho đến khi thanh đạt đến 99,9°C trong thùng thứ hai là khoảng 2+7,022=9,022 phút.

**Bài 5.** Một nhiệt kế đọc được 70 ° F được đặt trong lò đã được làm nóng trước đến nhiệt độ không đổi. Qua cửa sổ kính ở cửa lò, một người quan sát ghi lại rằng nhiệt kế ghi 110 ° F sau 1/2 phút và 145 ° F sau 1 phút. Hỏi nhiệt độ ban đầu trong lò là bao nhiêu?

**Lời giải.**

Gọi nhiệt độ ban đầu trong lò là:

Theo định luật làm nóng lên của Newton ta có phương trình vi phân:

Sử dụng phương pháp tách biến:

****

Theo giả thiết 

Vì vậy 

Theo giả thiết

****

Vậy nhiệt độ trong lò ban đầu là 

**Bài 6.** Tại t=0 một ống nghiệm kín đựng một hoá chất được nhúng vào bể chất lỏng. Nhiệt độ ban đầu của hóa chất trong ống nghiệm là 80°F. Trong bể chất lỏng có kiểm soát nhiệt độ (đo bằng độ F) được cho bởi  trong đó t được đo bằng phút.

(a) Giả sử rằng k=-0,1 trong (2). Trước khi giải quyết IVP, hãy mô tả bằng lời bạn mong đợi nhiệt độ T(t) của hóa chất sẽ như thế nào trong một khoảng thời gian ngắn và trong khoảng thời gian dài?

(b) Giải quyết bài toán giá trị ban đầu. Sử dụng công cụ vẽ đồ thị để vẽ biểu đồ của T(t) và trên các khoảng thời gian có độ dài khác nhau. Các đồ thị có phù hợp với dự đoán của bạn trong phần (a) không?

**Lời giải.**

Đổi  , nhiệt độ của hóa chất trong ống nghiệm là 27°C

Công thức tính nhiệt độ trong bể chất lỏng tính theo độ C là 

Nhiệt độ ban đầu của bồn chất lỏng là: ****

a) Nhiệt độ ban đầu của ống nghiệm cao hơn nhiệt độ chất lỏng trong bồn, nên trong thời gian ngắn ban đầu nhiệt độ hóa chất trong ống nghiệm sẽ giảm dần (nguội đi). Theo thời gian, nhiệt độ của bồn tắm sẽ tăng lên 38°C vì  giảm từ 1 về 0 khi t tăng từ 0. Do đó, về lâu dài, nhiệt độ của hóa chất phải tăng hoặc ấm dần về 38°C.

b) Áp dụng mô hình cho định luật làm mát của Newton, chúng ta có

Biến đổi ta được:



Do T(0)=27 nên 

Vậy nghiệm của phương trình là:

Diagram

Description automatically generated

**Hình 2.9.** Đường cong mỏng hơn xác minh dự đoán về sự nguội đi, sau đó là sự ấm dần lên 38°C. Đường cong rộng hơn cho thấy nhiệt độ Tm của bể chất lỏng.

**Bài 7.** Một xác chết được tìm thấy trong một căn phòng kín của một ngôi nhà có nhiệt độ không đổi 70°F. Tại thời điểm phát hiện, nhiệt độ lõi của thi thể được xác định là 85°F. Một giờ sau, một phép đo thứ hai cho thấy rằng nhiệt độ lõi của cơ thể là 80°F. Giả sử rằng thời điểm tử vong tương ứng với t=0 và nhiệt độ lõi tại thời điểm đó là 98,6 ° F. Xác định bao nhiêu giờ đã trôi qua trước khi thi thể được tìm thấy.

**Lời giải.**

Gọi T(t) là nhiệt độ thi thể tại thời điểm t.

Nhiệt độ của căn phòng là:  (không đổi)

Tại thời điểm nạn nhân chết là: t=0 ta có 

Thời điểm thi thể được phát hiện là t>0, ta có ****

Theo Định luật Làm mát của Newton ta có phương trình vi phân: 

Tách các biến chúng ta có 

Do



Theo giả thiết tại thời điểm phát hiện thi thể là: 

Sau 1 giờ nhiệt độ là 

Ta có hệ phương trình:



Vậy thời điểm tìm thấy thi thể cách thời điểm chết là 2,14 giờ.

**Bài 8.** Tốc độ nguội đi của một vật cũng phụ thuộc vào diện tích bề mặt tiếp xúc của nó S. Nếu S là hằng số, thì phương trình (2.3) trở thành  (2.4) trong đó k<0 và Tm là hằng số. Giả sử rằng hai cốc A và B được đổ cà phê cùng một lúc. Ban đầu, nhiệt độ của cà phê là 150°F. Diện tích bề mặt tiếp xúc của cà phê trong cốc B gấp đôi diện tích bề mặt của cà phê trong cốc A. Sau 30 phút, nhiệt độ của cà phê trong cốc A là 100°F. Nếu Tm =70°F thì nhiệt độ của cà phê trong cốc B sau 30 phút là bao nhiêu ?

**Lời giải.**

Giải phương trình vi phân



Ban đầu nhiệt độ của cà phê là ,

nhiệt độ môi trường là 

Ta có 

Công thức tính nhiệt độ tại thời điểm t là: 

Tại thời điểm t nhiệt độ của cà phê trong cốc A và cốc B lần lượt là :

 (trong đó S là diện tích mặt tiếp xúc của cốc A)

Theo giả thiết nhiệt độ cốc A sau 30 phút:



Nhiệt độ cốc B sau 30 phút là:



Vậy nhiệt độ cốc B sau 30 phút là 

**2.4.3. Mô phỏng bằng excel**

Trong ví dụ làm nguội bánh ở phần 2.4.1 ta có bài toán giá trị ban đầu là:

 với k=-0,19018

Sử dụng tính gần đúng bằng phương pháp Euler:  với h=1

 và 

ta có bảng số liệu sau:

Table

Description automatically generated

**Hình 2.10.** Biểu đồ nhiệt độ của bánh khi nguội đi.

**Nhận xét:** Dựa vào bảng số liệu và biểu đồ ta thấy nhiệt độ bánh giảm đi theo thời gian. Trong khoảng 15 phút đầu nhiệt độ giảm khá nhanh, càng về sau giảm càng chậm và từ khoảng 32 phút trở đi, nhiệt độ bánh gần như trở về nhiệt độ phòng. Nhiệt độ bánh ở 10 phút là 97,9°F (nhiệt độ bánh ở 10 phút tính được ở ví dụ phần 2.5.1 là 104,34°F, sai số khá lớn là do h=1 phút là cao).

**2.5. Hỗn hợp hai dung dịch muối**

**2.5.1. Xây dựng mô hình**

Trộn lẫn hai dung dịch muối có nồng độ khác nhau, lượng muối trong thùng trộn tại thời điểm t sẽ được mô hình hóa bởi 1 phương trình vi phân.

**Ví dụ 1.**

a) Giả sử rằng một bể trộn lớn ban đầu chứa 300 gallon nước muối (trong đó có 50 pound muối được hòa tan nước). Một dung dịch nước muối khác được bơm vào bể lớn với tốc độ 3 gallon/phút; nồng độ của muối trong dung dịch này là 2 pound trên mỗi gallon. Khi dung dịch trong bể được khuấy đều, nó được bơm ra với cùng tốc độ với dung dịch đi vào (xem Hình 2.6). Nếu A(t) biểu thị lượng muối (đo bằng pound) trong bể tại thời điểm t, thì tốc độ thay đổi A(t) là một tỷ lệ thực:

 (2.5)

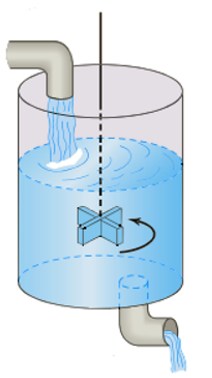
trong đó:

\*  là tỷ lệ muối đầu vào, là lượng muối đi vào bể đo bằng pound/phút

được tính bằng tích của nồng độ muối trong dung dịch bơm vào bể và tốc độ bơm vào của nước muối ()

\*  là tỷ lệ muối đầu ra, là lượng muối bơm ra khỏi bể đo bằng pound/phút

 được tính bằng tích của nồng độ muối trong dung dịch trong bể tại thời điểm t và tốc độ bơm ra của nước muối ()



**Hình 2.11.** Bể trộn dung dịch nước muối

Từ giả thiết ta tính được (chú ý 1lb=1 pound; )

****

****

Ta có mô hình phương trình vi phân:

****

Lượng muối ban đầu trong thùng là A(0)=50 (pound), ta có

****

Vậy công thức tính lượng muối trong bể tại thời điểm t là:

****

Tại thời điểm t=10s lượng muối là: A(10)=102,34 pound

b) Nếu dung dịch trong câu a) được khuấy đều được bơm ra với tốc độ chậm hơn,  thì chất lỏng sẽ tích tụ trong bể với tốc độ: 

Sau t phút: 1 (gal / phút) x t= t (gal) sẽ tích tụ trong bể.

do đó bể sẽ chứa (300 + t) gallon nước muối.

Nồng độ của muối trong bể tại thời điểm t là , và tỷ lệ đầu ra của muối là 

Khi đó phương trình vi phân của mô hình trở thành:



Ta có 

Suy ra 

Áp dụng công thức 

Suy ra 

Áp dụng điều kiện ban đầu 

Vậy công thức tính lượng muối trong bể tại thời điểm t là:



Ta có , nghĩa là theo thời gian lượng muối trong bể ngày càng tăng lên đến vô cùng (quan sát đồ thị hình bên dưới)

Chart, line chart

Description automatically generated

**Hình 2.12.** Lượng muối có trong bể trộn

c) Giả sử rằng bể có một nắp mở và có tổng dung tích là 400 gallon.

(1) Khi nào bể chữa sẽ tràn ra.

(2) Số pound muối trong bể tại thời điểm tràn ra sẽ là bao nhiêu?

(3) Giả sử rằng mặc dù bể đang tràn nước, dung dịch nước muối tiếp tục được bơm vào với tốc độ 3 gal /phút và dung dịch đã khuấy đều tiếp tục được bơm ra với tốc độ 2 gal /phút. Đưa ra phương pháp xác định số pound muối trong bể ở t =150 phút.

(4) Xác định số pound muối trong bể khi  Câu trả lời có phù hợp với trực giác mà ta quan sát được không?

(5) Vẽ đồ thị của A(t) trên khoảng [0, 500).

**Lời giải.**

(1) Ban đầu bình chứa 300 gallon dung dịch. Vì nước muối được bơm vào với tốc độ 3 gal /phút và hỗn hợp được bơm ra với tốc độ 2 gal /phút, nên sự thay đổi thực là tăng 1 gal / phút. Như vậy, trong 100 phút bể sẽ chứa được 400 gallon. Vậy sau 100 phút nước muối trong bể sẽ tràn ra.

(2) Phương trình vi phân mô tả lượng muối trong bể là

 với nghiệm 

Khi t=100 thì nước tràn ra, khi đó lượng muối trong bể là:



(3) Khi bể đầy ta có tỷ lệ muối vào và ra là:

****

****

lượng muối trong bể được điều chỉnh bởi phương trình vi phân

****

Giải phương trình, chúng ta thu được: ****

Với điều kiện ban đầu ****

Vậy công thức tính lượng muối trong thùng là: ****

Khi t=150 phút, lượng muối là:

****

(4) Khi  lượng muối là 800 lbs phù hợp với trực giác ​​vì

(400 gal) (2 lb / gal) = 800 lbs.

(5) đồ thị của A (t) trên khoảng [0, 500).

Chart

Description automatically generated with medium confidence

**Hình 2.13.** Lượng muối có trong thùng.

**2.5.2. Bài tập**

**Bài 1.** . Một bình chứa 200 lít dung dịch, trong đó có 30 gam muối được hòa tan. Nước muối chứa 1 gam muối / lít sau đó được bơm vào bể với tốc độ 4 L / phút; dung dịch trộn đều được bơm ra với tốc độ như nhau. Tìm số gam muối A (t) trong bình tại thời điểm t.

**Lời giải.** Ta có

****

****

Mô hình là bài toán giá trị ban đầu:

****

Giải phương trình vi phân:



Do 

Vậy số gam muối trong bình tại thời điểm t là:

**Bài 2.** Giải bài 1 giả sử rằng nước tinh khiết được bơm vào bể?

**Lời giải.**

Nếu nước tinh khiết được bơm vào bể thì

****

****

Mô hình là bài toán giá trị ban đầu:

****

Giải phương trình vi phân:



Do 

Vậy số gam muối trong bình tại thời điểm t là:

**Bài 3.** Một bể lớn có dung tích chứa 500 gallon nước tinh khiết. Nước muối chứa 2 pound muối mỗi gallon được bơm vào bể với tốc độ 5 gal / phút. Dung dịch trộn đều được bơm ra với tốc độ bằng tốc độ bơm vào. Tìm số A(t) pound muối trong thùng tại thời điểm t.

**Lời giải.**

Theo giả thiết ta có





Mô hình là bài toán giá trị ban đầu:



Giải phương trình vi phân:



Do 

Vậy lượng muối trong thùng tại thời điểm t là: 

**Bài 4.** Một bể lớn được lấp đầy một phần với 100 gallon dung dịch, trong đó có 10 pound muối được hòa tan. Nước muối chứa 1/2 pound muối trong mỗi gallon được bơm vào bể với tốc độ 6 gal / phút. Dung dịch đã trộn kỹ sau đó được bơm ra với tốc độ chậm hơn 4 gal / phút. Tìm số pound muối trong thùng sau 30 phút.

**Lời giải.**

Tỷ lệ muối đầu vào là: 

Do tốc độ bơm ra chậm hơn bơm vào nên mỗi phút lượng chất lỏng trong bể sẽ tăng thêm: 

Sau t phút: 2 (gal / phút) x t= 2t (gal) sẽ tích tụ trong bể.

do đó bể sẽ chứa (100 + 2t) gallon nước muối.

Nồng độ của muối trong bể tại thời điểm t là  và tỷ lệ đầu ra của muối là:

Khi đó phương trình vi phân của mô hình trở thành:



Ta có 

Suy ra 

Áp dụng công thức 

Suy ra 

Áp dụng điều kiện ban đầu 

Vậy công thức tính lượng muối trong bể tại thời điểm t là:



Số pound muối trong thùng sau 30 phút là:



**2.5.3. Mô phỏng bằng excel.**

Xét bài toán ở phần 2.5.1: Một bể trộn lớn ban đầu chứa 300 gallon nước muối (trong đó có 50 pound muối được hòa tan nước). Một dung dịch nước muối khác được bơm vào bể lớn với tốc độ 3 gallon / phút; nồng độ của muối trong dung dịch này là 2 pound trên mỗi gallon. Khi dung dịch trong bể được khuấy đều, nó được bơm ra với cùng tốc độ với dung dịch đi vào. Bài toán giá trị ban đầu cho mô hình này là: 

Sử dụng tính gần đúng bằng phương pháp Euler: , h=1

 ; 

ta có bảng số liệu sau:

Table

Description automatically generated

**Hình 2.14.** Biểu đồ lượng muối trong bể trộn.

**Nhận xét:** Dựa vào bảng số liệu và biểu đồ ta thấy lượng muối có trong bể tăng dần, tại thời điểm t=10s lượng muối là 102,59 pound(gần đúng với kết quả tính được ở ví dụ mục 2.5.1 là 102,34 pound)

**2.6. Mô hình mạch điện nối tiếp**

**2.6.1. Xây dựng mô hình**

\* Đối với một đoạn mạch nối tiếp chỉ chứa một điện trở và một cuộn cảm:

Cường độ dòng điện phụ thuộc vào biến t : 

Điện áp rơi trên cuộn cảm có độ tự cảm L: 

Điện áp rơi trên điện trở có cảm kháng R: 

Khi đó theo định luật thứ hai của Kirchhoff điện áp *E*(*t*) đặt vào trên một vòng lặp kín phải bằng tổng của các lần giảm điện áp trong vòng lặp, điện áp E(t) trên đoạn mạch là: (2.6)

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cho dòng điện I(t).

Diagram, timeline

Description automatically generated

**Hình 2.15**. Mạch điện R, L mắc nối tiếp

\* Đối với một đoạn mạch nối tiếp chỉ chứa một điện trở và một tụ điện:

Điện áp rơi trên tụ điện có điện dung C là:  (trong đó q là điện tích trên tụ điện)

Khi đó theo định luật thứ hai của Kirchhoff điện áp E(t) trên đoạn mạch là:

 ( 2.7 )

Diagram

Description automatically generated

**Hình 2.16**. Mạch điện R, C mắc nối tiếp.

Mà  nên phương trình ( 2.7 ) trở thành (2.8)

**Xét ví dụ sau:**

Một pin 12 vôn được mắc thành mạch nối tiếp với 1 cuộn cảm có độ tự cảm là 1/2 và điện trở là 10 ôm. Xác định dòng điện I(t) nếu dòng điện ban đầu bằng 0? Tính cường độ dòng điện tại thời điểm t=10s, t=20s?

Áp dụng công thức (1)



Do I(0)=0 nên 

Vậy công thức tính cường độ dòng điện là: 

Khi t=10s, cường độ dòng điện là 

Khi t=20s, cường độ dòng điện là 

**2.6.2. Bài tập**

**Bài 1.** Người ta đặt một suất điện động 30 vôn vào một đoạn mạch LR, trong đó có độ tự cảm là 0,1 henry và cảm kháng là 50 ôm. Tìm dòng điện I(t) nếu I(0)=0. Xác định dòng điện khi 

**Lời giải.** Theo giải thiết ta có E=30, L=0,1, R=50

Áp dụng công thức (2.6)



Do I(0)=0 nên 

Công thức tính  và 

**Bài 2.** Người ta đặt suất điện động 100 vôn vào đoạn mạch RC có cảm kháng là 200 ôm và điện dung là 10-4 farad. Tìm điện tích q(t) trên tụ nếu q(0)=0. Tìm cường độ dòng điện I(t).

**Lời giải.**

Theo giả thiết R=200,  , E(t)=100

Áp dụng công thức (2.8)



Do q(0)=0 nên  , do đó 

Vậy 

**Bài 3.** Một suất điện động 200 vôn đặt vào một đoạn mạch RC có cảm kháng là 1000 ôm và điện dung là 5.10-6 farad. Tìm điện tích q(t) trên tụ nếu I(0)=0,4. Xác định điện tích và cường độ dòng điện lúc t= 0,005 s. Xác định điện tích khi ** ?**

**Lời giải.**

Theo giả thiết 

Áp dụng công thức (2.8)



Ta lại có I(0)=0,4 nên 

Điện tích tại t=0,005s là:



Cường độ dòng điện tại t=0,005s



Khi  thì 

**Bài 3.** Một sức điện động

****

được mắc vào mạch nối tiếp LR, trong đó độ tự cảm là 20(H) và điện trở là  . Tìm I(t) hiện tại nếu I(0)=0.

**Lời giải.**

Theo giả thiết L=20(H) ,

Xét phương trình vi phân



\* Đối với  phương trình là:



Nếu I(0)=0 thì , suy ra 

Tại t =20, ta có 

\* Với t >20 phương trình vi phân là:



Tại t=20 ta muốn 

Vậy 

**Bài 4**. Một đoạn mạch LR nối tiếp có cuộn cảm thay đổi được độ tự cảm giảm dần bằng



Tìm dòng điện I(t) nếu điện trở là 0,2 ohm, hiệu điện thế là E(t)=4V và i(0)=0. Vẽ đồ thị I(t).

**Lời giải.**

Mạch điện RL mắc nối tiếp

\* Khi  áp dụng công thức (2.6) ta có:

Do I(0)=0 nên 

Thay vào I(t) ta được:



\* Khi t>10, L=0 ta có phương trình (2.6) trở thành: 0,2I(t)=4, suy ra I(t)=20.

Ta có đồ thị I(t).

Diagram

Description automatically generated

**2.6.3. Mô phỏng bằng excel**

Xét lại ví dụ phần 2.6.1: Một pin 12 vôn được mắc thành mạch nối tiếp với 1 cuộn cảm có độ tự cảm là 1/2 và điện trở là 10 ôm.

Áp dụng công thức (2.6) ta có bài toán giá trị ban đầu:



Sử dụng tính gần đúng bằng phương pháp Euler:  với h là bước nhảy  và 

ta có bảng số liệu sau:

Table

Description automatically generated

**Hình 2.17.** Biểu đồ cường độ dòng điện tức thời tại thời điểm t.

**Nhận xét:**Dựa vào bảng số liệu và biểu đồ ta thấy cường độ dòng điện ngày càng tăng theo thời gian. Đặc biệt từ 0s đến 0,1s tốc độ tăng khá nhanh, từ 0,1s trở đi tốc độ tăng chậm hơn. Cường độ dòng điện tại 0,1s là 1,07A và tại 0,2s là 1,186A xấp xỉ gần đúng bằng kết quả tính được ở ví dụ phần 2.6.1 (là 1,04A và 1,18A)

**2.7. Mô hình vật rơi trong không khí**

**2.7.1. Xây dựng mô hình**

**2.7.1.1. Vật rơi** **không có lực cản của không khí.**

Để xây dựng một mô hình toán học về chuyển động của một vật thể dưới tác động của một lực ta sử dụng **định luật chuyển động của Newton** nói rằng một vật thể sẽ đứng yên hoặc sẽ tiếp tục chuyển động với vận tốc không đổi trừ khi bị ngoại lực tác động. Trong mỗi trường hợp, điều này tương đương với việc nói rằng khi tổng các lực tác dụng lên vật bằng không thì gia tốc a của vật bằng không. **Định luật thứ hai về chuyển động của Newton** chỉ ra rằng khi lực thuần tác dụng lên một vật khác 0, thì lực thuần tỷ lệ với gia tốc a hay chính xác hơn là F = ma, trong đó m là khối lượng của vật đó.

Bây giờ, giả sử một tảng đá được ném xuống từ mái của một tòa nhà như minh họa trong Hình 2.18. Ta gọi s(t) là khoảng cách của hòn đá so với mặt đất tại thời điểm t. Gia tốc của hòn đá là đạo hàm cấp 2 của s(t): . Nếu chúng ta giả định rằng hướng đi lên là dương và **không có lực nào tác động lên đá ngoài lực hấp dẫn**, thì theo định luật thứ hai của Newton ta có:



Trong đó g là gia tốc trọng trường. Nếu chiều cao của tòa nhà là s0 và vận tốc ban đầu của tảng đá là v0, thì s được xác định từ bài toán giá trị ban đầu bậc hai



Từ phương trình (5) ta dễ dàng suy ra công thức:



Diagram

Description automatically generated

**HÌNH 2.18.** Vị trí của đá được đo từ mặt đất

**2.7.1.2. Vật rơi có lực cản của không khí.**

Nhà toán học và vật lý người Ý Galileo Galilei (1564–1642) đã làm thí nghiệm thả vật rơi tự do từ tháp nghiêng Pisa, người ta thường tin rằng các vật nặng hơn chẳng hạn như một quả đạn pháo khi rơi tự do sẽ rơi với gia tốc lớn hơn các vật nhẹ hơn, chẳng hạn như như một chiếc lông vũ. Rõ ràng, một viên đạn pháo và một chiếc lông vũ khi được thả xuống đồng thời từ cùng một độ cao sẽ rơi với tốc độ khác nhau, nhưng không phải vì một viên đạn pháo nặng hơn. Nguyên nhân là do lực cản của không khí. Lực cản không khí tỷ lệ với vận tốc tức thời v(t).

Nếu chúng ta coi chiều dương hướng xuống, thì lực tổng hợp tác dụng lên vật có khối lượng m sẽ là: *F* = *F*1 + *F*2 = *mg - kv*, trong đó :

\* *F*1 = *mg* là trọng lực tác dụng theo chiều dương

\* *F*2 = −*kv* là lực cản không khí, tác động theo hướng ngược lại hoặc hướng lên. (xem Hình 2.19) .

Mặt khác vì *v* liên quan đến gia tốc *a* bằng công thức , định luật thứ hai của Newton trở thành *.* Bằng cách cân bằng lực thực tế tác động vào vật với dạng định luật thứ hai này của Newton, chúng ta thu được phương trình vi phân bậc nhất cho vận tốc *v*(*t*) của vật thể tại thời điểm *t* là:  (2.12) Ở đây k là hằng số tỷ lệ dương.

Nếu s(t) là quãng đường vật rơi được trong thời gian t kể từ thời điểm ban đầu thả thì . Thay vào (2.12) ta được phương trình vi phân cấp hai đối với s:

 (2.13)

Box and whisker chart

Description automatically generated with medium confidence

**HÌNH 2.19.** Vật rơi khối lượng m

Giả sử vận tốc ban đầu  , ta có mô hình cho vật rơi trong không khí là phương trình vi phân bậc nhất đối với v(t) là phương trình (2.12), ta sẽ đi giải phương trình (2.12).



Nếu 

và nghiệm của bài toán giá trị ban đầu là  (2.13)

Nếu  vận tốc giới hạn là 

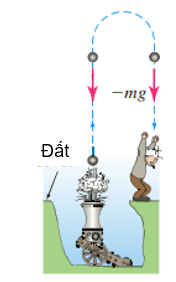
Do  (2.14)

**2.7.2. Bài tập**

**Bài 1.** Giả sử một viên đạn pháo nặng 16 pound được bắn thẳng đứng lên trên, như trong Hình 2.20, với vận tốc ban đầu v0=300 ft/s.

(a) Giả sử bỏ qua lực cản của không khí. Nếu chiều dương hướng lên, thì mô hình trạng thái của viên đạn pháo được cho bởi  (phương trình (2.9) của Mục 2.7.1). Vì  nên phương trình vi phân cuối cùng có dạng , trong đó chúng ta lấy g=32ft /s2. Tìm vận tốc v(t) của quả đạn pháo tại thời điểm t, tính v(5)?

(b) Sử dụng kết quả thu được ở phần (a) để xác định độ cao s (t) của quả đạn pháo được đo từ mặt đất. Tìm độ cao lớn nhất mà quả đạn pháo đạt được.



**Hình 2.20**. Viên đạn pháo được bắn lên từ mặt đất

**Lời giải**

(a) Đổi g=32ft /s2= 9,8 m/s2, v0=300 ft/s=91,5 m/s (1ft=0,305 m)

Từ phương trình 

Từ v(0) = 91,5 ta tìm được c = 91,5, và ta được g = 9,8, do đó vận tốc là

v(t) = −9,8t + 91,5.

Khi t=5s, vận tốc là: v(5)=42,5 (m/s)

(b) Từ v(t) = −9,8t + 91,5 mà 

Do s(0)=0 nên c=0 suy ra 

Độ cao cực đại đạt được khi v=0, ta có 

Khi đó chiều cao tối đa của quả đạn pháo so với mặt đất là: 

**Bài 2.**  Bắn quả đạn pháo như trong bài 1, nhưng lần này giả sử rằng lực cản của không khí tỷ lệ với vận tốc tức thời. Vì vậy độ cao tối đa mà quả đạn pháo đạt được phải nhỏ hơn trong phần (b) của Bài toán 1. Hãy chứng minh điều này bằng cách giả sử rằng hằng số tỉ lệ là k=0,0025.

**Lời giải.**

Khi lực cản của không khí tỷ lệ với vận tốc, áp dụng công thức (2.13) khi chiều dương hướng lên:



Từ v(0) = 91,5 ta được 

Áp dụng công thức (2.14)

Sử dụng S(0) = 0 ta có: 

Đặt k = 0,0025, khối lượng m = 16. 0,454=7,26 kg=7260g và g = 9,8 ta có





Độ cao cực đại đạt được khi . Chiều cao tối đa sẽ là

s(8,72) = 424,9 m, nhỏ hơn chiều cao tối đa trong Bài toán 1.

**Bài 3.** Một vận động viên nhảy dù nặng 125 pound, còn chiếc dù và thiết bị của cô ấy cộng lại nặng 35 pound nữa. Sau khi thoát ra từ máy bay ở độ cao 15.000 feet, cô ấy đợi 15 giây và mở dù của mình. Giả sử rằng hằng số tỉ lệ có giá trị k=72,5 trong khi rơi tự do và k=145 sau khi dù được mở ra. Giả sử rằng vận tốc ban đầu của cô ấy khi rời máy bay bằng không. Vận tốc của cô ấy là bao nhiêu và cô ấy đã đi được quãng đường bao xa sau 20 giây kể từ khi rời máy bay? Xem Hình 2.21. Vận tốc của cô ấy lúc 20 giây như thế nào so với vận tốc lúc cuối của cô ấy? Cô ấy mất bao lâu để đến được mặt đất?

Diagram

Description automatically generated

**HÌNH 2.21.** Nhảy dù.

**Lời giải**

Giả sử rằng lực cản của không khí tỉ lệ với vận tốc và chiều dương hướng xuống với s (0) = 0, mô hình cho vận tốc là 

Áp dụng công thức (2.13): 

Vì vận tốc ban đầu  nên  

\* Khi chưa mở dù: k=7,25; m=(125+35).0,45359=72,5 kg; g=9,8 thay vào v(t) ta được:  và 

Do 

Tại t=15s, vận tốc đạt được là: 

Quãng đường đi được là: 

\* Khi dù mở ra k=145, vận tốc ban đầu bây giờ là , thời gian tính từ lúc mở dù coi như t=0, s(0)=0

Áp dụng công thức (2.13) 



do 

Sau khi rời máy bay 20s, nghĩa là 5s sau khi dù bung ra,, vận tốc của vận động viên nhảy dù là: 

quãng đường đi được là 

Vậy tính từ khi nhảy dù, vận tốc của vận động viên là: v=4,903 (m/s)

Quãng đường đi được là: 

Vận tốc cuối của cô ấy là  như vậy sau khi nhảy dù được 20s, vận động viên đã gần đạt đến vận tốc cuối cùng.

\* Khoảng cách điểm nhảy dù so với mặt đất là: 15000 ft=4500(m)

Tại thời điểm 15s sau khi mở chiếc dù ra, khoảng cách còn lại đến mặt đất là:



Giải phương trình:



Thời gian từ lúc nhảy dù ra khỏi máy bay đến lúc tiếp cận mặt đất là:

766,47+15=781,47(s)=13,0245(phút)

**2.7.3. Mô phỏng bằng Excel**

Xét bài toán bắn viên đạn pháo (như trong bài tập 2) với g=9,8; v0=300 ft/s=91,5 m/s ; m=7,26 kg, chọn chiều dương hướng lên.

Mô hình của chuyển động theo vận tốc tức thời là: 

Sử dụng tính gần đúng bằng phương pháp Euler: với h là bước nhảy ,  và 

ta có bảng số liệu sau:

Table

Description automatically generated

**Hình 2.22.** Biểu đồ vận tốc tức thời của quả đạn pháo.

**Nhận xét:** Dựa vào bảng số liệu và biểu đồ ta thấy ban đầu quả đạn pháo chuyển động lên trên (thể hiện bởi vận tốc mang dấu dương do chiều dương chọn hướng lên), vận tốc quả đạn pháo ngày càng giảm cho đến khi vận tốc bằng 0 thì quả đạn pháo chuyển động xuống mặt đất (thể hiện bởi vận tốc mang dấu âm) và lúc này vận tốc có giá trị tăng dần, quả đạn pháo chuyển động nhanh dần. Vận tốc khi t=5s là 42,6 m/s , khi t=10s là -6,3(m/s) (gần đúng với kết quả tính được ở bài tập 1a là 42,5m/s và -6,5m/s). Đạn pháo đạt độ cao lớn nhất (khi vận tốc bằng 0) vào khoảng hơn 9s sau khi ném (gần đúng với kết quả tính được ở bài 1b là 9,34s.

**2.8. Mô hình chuyển động của tên lửa**

**2.8.1. Xây dựng mô hình**

****

**Hình 2.23.** Tên lửa phóng thẳng đứng lên trời.

Một tên lửa một tầng nhỏ được phóng thẳng đứng như hình 2.23. Sau khi phóng, tên lửa tiêu thụ nhiên liệu, và do đó tổng khối lượng m(t) của nó thay đổi theo thời gian t> 0.

v(t) là vận tốc tức thời tại thời điểm t.

Nếu giả thiết rằng chiều dương hướng lên, lực cản của không khí tỷ lệ với vận tốc tức thời v(t) của tên lửa theo hằng số k, và R là lực đẩy hoặc lực hướng lên được tạo ra bởi hệ thống đẩy.

Gọi  là tổng khối lượng tên lửa tại thời điểm t=0

 là tốc độ tiêu hao nhiên liệu, suy ra lượng nhiên liệu bị tiêu hao tại thời điểm t là 

Khối lượng nhiên liệu của tên lửa tại thời điểm t là: 

F là tổng lực tác dụng lên tên lửa, áp dụng định luật 2 của Newton khi khối lượng của vật thay đổi theo thời gian:



Mà tổng lực tác dụng lên tên lửa là:  (2)

Từ (1) và (2) ta có:



Vậy mô hình cho vận tốc tức thời của tên lửa là:

 (2.15)

**2.8.2. Bài tập**

**Bài 1.** Với giả thiết như phần 2.8.1 biết 

a) Tìm vận tốc v(t) của tên lửa, tính vận tốc tại t=10s, 20s?

b) Tính độ cao s(t) của tên lửa tại thời điểm t.

**Lời giải**

a) Với các giá trị được đưa ra trong đề bài, bài toán giá trị ban đầu trở thành:



Đây là một phương trình vi phân tuyến tính với hệ số tích phân

Xét phương trình thuần nhất: (1)



Nghiệm của (1) là:



Xét phương trình  (2)

Nghiệm 

Với



Áp dụng công thức (1.8) ta được:



Do 

Như vậy vận tốc tên lửa tại thời điểm t là:



Vận tốc của tên lửa tại t=10s là: v(10)=4,4(m/s)

Vận tốc của tên lửa tại t=20s là: v(20)=13,6(m/s)

b) do 

Ta giả sử đo độ cao của tên lửa từ mặt đất s = 0, sao cho s(0) = 0 nên c1 = 0.

Khi đó độ cao của tên lửa tại thời điểm t là 

**Bài 2.** Phóng một tên lửa với giả thiết như trong bài toán 1, giả sử khối lượng ban đầu của tên lửa là m0 thì 50 kg là khối lượng của nhiên liệu.

(a) Thời gian tiêu hao tb, hoặc thời gian mà tất cả nhiên liệu được tiêu thụ là bao nhiêu?

(b) Vận tốc của tên lửa lúc đốt hết là bao nhiêu?

(c) Độ cao của tên lửa lúc đốt hết là bao nhiêu?

(d) Tại sao ta mong đợi tên lửa đạt được độ cao lớn hơn con số trong phần (b)?

(e) Sau khi đốt cháy, một mô hình toán học cho vận tốc của tên lửa là gì?

**Lời giải.**

(a) gọi tb là thời gian mà tất cả nhiên liệu được tiêu thụ hết

Gọi là lượng nhiên liệu tiêu thụ đến thời điểm t,

theo giả thiết , tốc độ tiêu thụ nhiên liệu 

Thời gian cháy hết nhiên liệu là: 

(b) Tại thời điểm cháy hết t=50 s, khi đó vận tốc tên lửa là:



(c) Chiều cao của tên lửa lúc cháy hết là: 

(d) Khi đốt cháy hết nhiên liệu tên lửa sẽ có động lượng hướng lên sẽ đưa nó lên cao hơn

(e) Sau khi đốt cháy, tổng khối lượng của tên lửa là một hằng số 200 - 50 = 150 kg.

Khi đó áp dụng định luật 2 Newton với vật có khối lượng không đổi, tổng lực tác dụng lên tên lửa là: 

Chọn chiều dương hướng lên, các lực tác dụng vào tên lửa bao gồm lực cản không khí , trọng lực của trái đất, lực đẩy tạo ra bởi hệ thống đẩy. Ta có:



Ta xác định được m = 150, k = 3, g = 9,8 và R = 0, vì lực đẩy bằng 0 sau khi đốt cháy nhiên liệu, do đó mô hình toán học cho vận tốc của tên lửa là: 

**2.8.3. Mô phỏng bằng Excel**

Xét bài toán 1 cho bởi mô hình sau:



Sử dụng tính gần đúng bằng phương pháp Euler: với h là bước nhảy

 và 

ta có bảng số liệu sau:

Table

Description automatically generated

**Hình 2.24.** Vận tốc tức thời của tên lửa được bắn trong bài tập 1.

**Nhận xét:** Từ bảng số liệu và biểu đồ ta thấy vận tốc tên lửa ngày càng tăng theo thời gian, vận tốc của tên lửa tại 10s là 4,17m/s và tại 20s là 13,16m/s, kết quả này gần đúng với kết quả tính được trong bài tập 1 lần lượt là 4,4m/s và 13,6m/s.

**2.9. Mô hình quần thể cá**

**2.9.1. Xây dựng mô hình**

Xét một quần thể cá trong đó việc thu hoạch diễn ra với tốc độ không đổi là m.

Tốc độ tăng trưởng của quần thể cá được đưa ra bởi bài toán giá trị ban đầu:

 , P(0)=P0

trong đó k và h là các hằng số dương, P(t) là lượng cá tại thời điểm t, số lượng cá ban đầu là P(0)=P0

Xét phương trình vi phân:



Do P(0)=P0 suy ra 

Vậy 

**2.9.2. Bài tập**

**Bài 1.** Xét quần thể cá có mô hình , P(0)=P0

(a) Mô tả tập tính của quần thể cá : P(t) khi thời gian t tăng dần trong ba trường hợp 

(b) Sử dụng kết quả từ phần (a) để xác định xem liệu quần thể cá có bao giờ bị tuyệt chủng trong thời gian hữu hạn hay không, tức là có tồn tại thời gian T>0 sao cho P(T)=0 hay không? Nếu quần thể bị tuyệt chủng thì tìm T.

**Lời giải.**

(a)

\* Xét  , suy ra 

tăng khi thời gian t tăng.

\* Xét  , suy ra 

Điều đó có nghĩa là lượng cá không đổi theo thời gian.

\* Xét  , suy ra 

Suy ra hàm số P(t) giảm khi t tăng.

(b) Theo câu a, khi  hàm P(t) giảm khi t tăng, đồ thị đi xuống từ trái sang phải và cắt qua trục t. Vì vậy tồn tại giá trị t=T sao cho P(T)=0

Hay 

Vậy  (2) là thời gian để quần thể cá bị tuyệt chủng

**Bài 2.** Xét mô hình cá có bài toán giá trị ban đầu: Xét quần thể cá có mô hình , P(0)=P0 với hệ số k=0,5, m=600 con/năm,  .

a) Tính lượng cá còn lại sau 2 năm?

b) sau mấy năm cá sẽ bị tuyệt chủng?

**Lời giải.**

a) Áp dụng công thức (1) với t=2**,**  k=0,5, m=600 con/năm,  , số con cá còn lại sau 2 năm là:



b) thấy  nên sau một khoảng thời gian cá sẽ bị tuyệt chủng.

Áp dụng công thức (2) thời gian để cá tuyệt chủng là:



Vậy sau khoảng 3,6 năm cá sẽ bị tuyệt chủng.

**2.9.3. Mô phỏng bằng Excel**

Xét mô hình cá ở bài 2:với k=0,5, m=600 con/năm, (con)

Ta có phương trình vi phân 

Sử dụng tính gần đúng bằng phương pháp Euler: với h là bước nhảy  và 

ta có bảng số liệu sau:

**Table

Description automatically generated**

**Hình 2.26.** Biểu đồ lượng cá tại thời điểm t.

**Nhận xét**: Dựa vào bảng số liệu và đồ thị ta thấy lượng cá ngày càng giảm theo thời gian (vì có hiện tượng đánh bắt cá), ngoài ra đồ thị cắt trục t tại điểm gần 3,7 chứng tỏ sau khoảng gần 3,7 năm quần thể cá sẽ bị tuyệt chủng (gần đúng với kết quả tính được ở bài 2 là 3,6 năm)

**2.10. Mô hình hộp trượt**

**2.10.1. Xây dựng mô hình**

**Diagram

Description automatically generated**

**Hình 2.25.** Hộp trượt xuống mặt phẳng nghiêng.

Một hộp khối lượng m trượt xuống một mặt phẳng nghiêng tạo với phương ngang một góc như hình 2.25. Gọi v(t) là vận tốc tức thời tại thời điểm t, chọn gốc tọa độ ở vị trí cao nhất, chiều dương cùng chiều với hướng chuyển động, v(0)=0, s(0)=0. Ta sẽ đi tìm phương trình vi phân cho vận tốc v(t) trong ba trường hợp sau:

(i) Không có ma sát trượt và không có lực cản của không khí.

Khi đó lực tác dụng lên hộp chỉ có trọng lực, chiếu lên phương chuyển động có độ lớn là: 

Sử dụng định luật chuyển động thứ 2 của NewTon: 

Phương trình vi phân của vận tốc v(t) là: 

(ii) Có ma sát trượt và không có lực cản của không khí

Lực ma sát trượt là lực hãm tác dụng ngược lại với hướng chuyển động.

Với là hệ số ma sát trượt, N là thành phần pháp tuyến của trọng lượng của hộp: 

Lực ma sát trượt có độ lớn là: 

Mô hình trở thành: (2)

(iii) Có lực ma sát trượt và lực cản của không khí

Lực ma sát trượt có độ lớn là: 

Lực cản của không khí tỷ lệ thuận với vận tốc tức thời, ngược hướng với hướng chuyển động. Độ lớn lực cản không khí là: kv

Mô hình chuyển động là:



**2.10.2. Bài tập**

**Bài 1.** Xét hộp trượt như trong phần 2.10.1, giả sử rằng chiếc hộp nặng 96 pound, góc nghiêng của mặt phẳng là  hệ số của ma sát trượt là  , và lực hãm bổ sung do lực cản của không khí là số bằng  .Giải phương trình vi phân trong ba trường hợp trên, giả sử rằng hộp bắt đầu từ trạng thái nghỉ từ điểm cao nhất cách mặt đất 50 ft.

**Lời giải**

(i) Không có ma sát trượt, không có lực cản không khí.

Phương trình vi phân (1) trở thành:



Vì v(0)=0 nên 

(ii) Có ma sát trượt và không có lực cản không khí.

Phương trình vi phân (3) trở thành : 

Suy ra 

Do 

(iii) Khi có lực ma sát trượt và lực cản không khí

Phương trình vi phân (5) trở thành:



Giải phương trình vi phân trên ta được nghiệm:

Vì  . Vậy 

Vận tốc của hộp tại t=10s là v(10)=4,5(m/s)

Vận tốc của hộp tại t=20s là v(10)=4,867(m/s)

**Bài 2.**

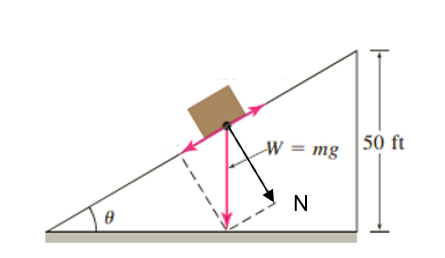
(a)Trong Bài 1, gọi s(t) là khoảng cách đo được xuống mặt phẳng nghiêng từ điểm cao nhất. tính thời gian để hộp trượt hoàn toàn xuống mặt phẳng nghiêng.

(b) Trong trường hợp có ma sát  nhưng không có lực cản của không khí, giải thích tại sao hộp không trượt xuống mặt phẳng bắt đầu từ điểm cao nhất trên mặt đất khi góc nghiêng  thỏa mãn .

(c) Hộp sẽ trượt xuống trên mặt phẳng khi  nếu nó được truyền một vận tốc ban đầu . Giả sử rằng . Chứng minh rằng . Hộp sẽ trượt xuống mặt phẳng bao xa nếu ?

(d) Sử dụng các giá trị , tính gần đúng vận tốc ban đầu  nhỏ nhất có thể truyền cho hộp sao cho khi bắt đầu từ điểm cao nhất cách mặt đất 50 ft, nó sẽ trượt hoàn toàn xuống mặt phẳng nghiêng. Sau đó cho biết thời gian tương ứng mà nó cần để trượt xuống mặt phẳng.

**Lời giải.**

****

a) đổi 50 fit=15 m, 

(i) Khi không có ma sát trượt và lực cản không khí.

Áp dụng công thức (1)với v(0)=0, do đó công thức tính vận tốc tức thời là: 

Áp dụng , s(0)=0, suy ra 

chiều dài mặt phẳng nghiêng chính là quãng đường đi được của hộp

****

Suy ra ****

Vậy thời gian để hộp trượt từ đỉnh xuống chân mặt phẳng nghiêng là 3,5 (s)

(ii) Khi có ma sát trượt và không có lực cản không khí.

Áp dụng công thức (2) do v(0)=0 nên 

Áp dụng , s(0)=0, suy ra



Thay s(t)=30 suy ra

Vậy thời gian để hộp trượt từ đỉnh xuống chân mặt phẳng nghiêng là 7 (s)

(iii) Có lực ma sát trượt và có lực cản của không khí

Áp dụng phương trình (3) 

Với v(0)=0, giải phương trình vi phân ta được: 

Do suy ra 

Vì 

Thay s(t)=30, giải phương trình  ta được 

Vậy thời gian để hộp trượt từ đỉnh xuống chân mặt phẳng nghiêng là 9,8 (s)

(b)Khicó ma sát  nhưng không có lực cản của không khí

Phương trình vi phân của mô hình là:



\* Nếu 

Mà , nghĩa là hộp không chuyển động.

\* Nếu 

Vậy nếu  thì vật không trượt xuống.

(c) Hộp sẽ trượt xuống trên mặt phẳng khi  nếu nó được truyền một vận tốc ban đầu . Giả sử rằng , . Hộp sẽ trượt xuống mặt phẳng bao xa ?

Từ phương trình vi phân:



Do v(0)=1ft=0,3 (m/s) suy ra c=0, 

Suy ra 

Khi hộp dừng lại 

Mà 

Độ dài mà hộp trượt đi được là: 

(d) ) Sử dụng các giá trị , tính gần đúng vận tốc ban đầu  nhỏ nhất có thể truyền cho hộp sao cho khi bắt đầu từ điểm cao nhất cách mặt đất 50 ft, nó sẽ trượt hoàn toàn xuống mặt phẳng nghiêng. Sau đó cho biết thời gian tương ứng mà nó cần để trượt xuống mặt phẳng.

Với (do s(0)=0)

Quãng đường hộp trượt cần di chuyển là: s(t)=30 (m) ta có phương trình:

 (\*)

Phương trình này có nghiệm khi và chỉ khi 

Do  nên vận tốc ban đầu nhỏ nhất là: 

Khi đó  phương trình (\*) có nghiệm là: t=28 (s).

Vậy thời gian hộp trượt xuống mặt phẳng là 28(s).

**2.10.3. Mô phỏng bằng excel**

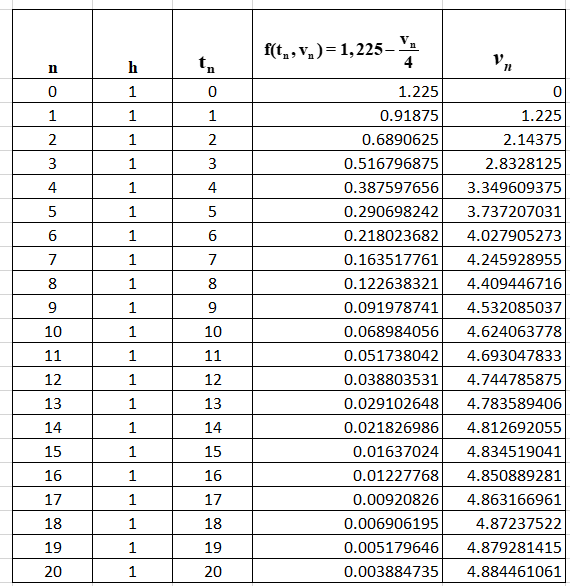
Xét hộp trượt trên mặt phẳng nghiêng cógóc nghiêng của mặt phẳng là  hệ số của ma sát trượt là  , và lực hãm bổ sung do lực cản của không khí là số bằng 

Mô hình cho chuyển động này là:



Sử dụng tính gần đúng bằng phương pháp Euler: với h là bước nhảy  và 

ta có bảng số liệu sau:



**Hình 2.26.** Biểu đồ vận tốc của hộp trượt khi có ma sát trượt và có sức cản của không khí.

**Nhận xét:** Dựa vào bảng số liệu và biểu đồ ta thấy vận tốc của vật ngày càng tăng khi hộp trượt từ đỉnh xuống chân mặt phẳng nghiêng, tuy nhiên trong 4s đầu tốc độ tăng nhanh hơn về sau. Vận tốc của hộp tại 10s là 4,6m/s và tại 20s là 4,88m/s, kết quả này gần đúng với kết quả tính được ở bài 1 câu c (vận tốc lần lượt là 4,5m/s và 4,867m/s)

**PHẦN 3- KẾT LUẬN**

Luận văn này tập trungphân tích và mô phỏng một số bài toán thực tế bằng phương trình vi phân tuyến tính bậc nhất như mô hình sự phát triển của vi khuẩn, sự phân hủy của chất phóng xạ, tuổi của hóa thạch, sự nóng lên/nguội đi của vật, hỗn hợp 2 dung dịch, vật rơi trong không khí, mạch điện mắc nối tiếp, chuyển động của tên lửa, quần thể cá, hộp trượt xuống chân mặt phẳng nghiêng.

Trong mỗi bài toán thực tế, bên cạnh việc xây dựng mô hình dưới dạng bài toán giá trị ban đầu (IVP) và tìm công thức nghiệm của các bài toán đó, luận văn còn đưa ra một số bài tập tính toán một số yếu tố liên quan như thời gian, quãng đường, khối lượng....

Tuy nhiên với một số lớp phương trình vi phân đặc biệt thì có phương pháp tìm nghiệm của chúng, nhưng không phải bất kỳ phương trình vi phân nào cũng tìm được nghiệm một cách dễ dàng. Trong khoa học, kỹ thuật đôi chỉ cần đòi hỏi độ chính xác tới một mức nào đó là chấp nhận được, do vậy việc tìm nghiệm chính xác đôi khi mất thời gian và có khi không cần thiết. Vì vậy luận văn cũng trình bày một phương pháp tính nghiệm xấp xỉ đó là phương pháp Euler.

Dựa vào phương pháp Euler luận văn cũng sử dụng công cụ excel để lập bảng tính các nghiệm xấp xỉ với số điểm cần thiết và vẽ đồ thị minh họa. Việc sử dụng excel khá đơn giản, và dựa vào đồ thị có thể có cái nhìn trực quan về bài toán thực tế đang tìm hiểu.

**Tài liệu tham khảo**

**\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\***